Rozšíření MA1.
Funkce více proměnných – příklady 2.

Derivace funkce ve směru

1. Určete derivaci funkce $f(x,y)=\sqrt{x^3+y}$ v bodě $(1,3)$ ve směru vektoru $\vec{a}=(3,1)$.
2. Určete derivaci funkce $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $\vec{a}=(2,1)$.
3. Určete derivaci funkce $f(x,y)=\log(x+y)$ v bodě $(1,2)$, ležícím na parabole $y^2=4x$ ve směru jednotkového vektoru, tečného k parabole v tomto bodě.
4. Zjistěte, zda funkce $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ je v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $\vec{a}=(2,1)$ rostoucí nebo klesající. Najděte vektor, v jehož směru funkce *f* v bodě $(1,1)$ roste nejrychleji.

Shrnutí základních pojmů

1. Je dána funkce $f(x,y)=\log\left(\sqrt{y+1}-x\right)$.

   a) Najděte definiční obor *D* funkce *g* a nakreslete jej.
   b) Vypočítejte $\nabla f(0,0)$;
   c) Ukažte, že funkce *f* je v bodě $[0,0]$ diferencovatelná. Určete v tomto bodě diferenciál a rovnici tečné roviny.
   d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace *f* (- 0,04; 0,02).

2. Je dána funkce $f(x,y)=4\sqrt{1-\dfrac{y}{x+1}}$.

   a) Najděte definiční obor *D* funkce *f* a nakreslete jej.
   b) Vypočítejte $\nabla f(0,-3)$;
   c) Ukažte, že funkce *f* je diferencovatelná v bodě $(0,-3)$ a určete v tomto bodě diferenciál funkce *f*.
   d) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu *f* v bodě $(0,-3,8)$.
   e) Nabývá funkce *f* globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř?

3. Je dána funkce $g(x,y)=\arcsin\left(x^2-y\right)$.

   a) Najděte definiční obor *D* funkce *g* a nakreslete jej.
   b) Ukažte, že funkce *g* je v bodě $(1,1)$ diferencovatelná. Určete v tomto bodě diferenciál a rovnici tečné roviny .
   c) Napište lineární aproximaci funkce $g(x,y)$ v okolí bodu $(1,1)$.

Derivace složené funkce více proměnných:

1. „Technika derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového“ pravidla (jaké to jsou předpoklady?)

   a) Je-li $g(t) = f(\sin t, t^2)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$ pro obecnou funkci f a pak pro $f(x,y) = x^y$.

   b) Určete $g'(x)$ a $g''(x)$, je-li $g(x) = F(x, \varphi(x))$.

   c) Určete parciální derivace 1.a 2. řádu funkce $g(x,y)$, je-li

   (i) $g(x,y) = f(x^2 y, \frac{x}{y})$; (ii) $g(x,y) = f(x^2 + y^2, xy, \frac{y}{x})$; (iii) $g(x,y) = F(x, y, \varphi(x,y))$.

   d) Určete parciální derivace 1.a 2. řádu funkce $g(x,y,z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$.

a užití:

2. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $X_0 \in R^n$ a $\nabla f(X_0) \neq \vec{0}$, pak vektor $\nabla f(X_0)$ udává směr nejrychlejšího růstu funkce f v bodě X_0.

A pro zájemce trošku těžší, ale snad užitečné příklady:

3*. Najděte funkci $f(x,y)$, která splňuje parciální diferenciální rovnici $x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ pomocí transformace rovnice do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi, x = r\sin\varphi$, $r \in (0,\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

4*. Najděte řešení $u(t,x)$ pro $t \geq 0$ a $x \in R$ vlnové rovnice $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (a >0), které splňuje počáteční podmínky $u(0,x) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,x) = \psi(x)$ pro $x \in R$, pomocí transformace $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.